

УДК 665.1 – 665.3
№ Др0108u005350

Українська академія аграрних наук
Інститут механізації тваринництва

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Директор ІМТ УААН
д.т.н., проф.

_____ І.А. Шевченко
« » _____ 2009 р.

ЗВІТ

ЩОДО НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ НА ТЕМУ:

«05.1-2/01 Створити наукові основи глибокої переробки та використання біосировини для енергетичного і кормового забезпечення виробництва тваринницької продукції»

05.1-2/02.02.02 Провести уточнення математичних моделей процесів волого-теплової обробки й віджимання насіння ріцини та виконати перевірку їх адекватності за результатами експериментальних досліджень

Розробити математичну модель віджимання мезги насіння ріцини у шнековому пресі

Науковій керівник завдання
д.т.н., проф.

В.А. Дідур

Завідувач лабораторії
біотехники та переробки біосировини
к.т.н., с.н.с.

Р.І. Безпалов

Запоріжжя, 2009

Виконавець

Відповідальній виконувач, с.н.с., к.т.н.

В.О. Ткаченко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕССОВАНИЯ МЕЗГИ И ФИЛЬРАЦИИ МАСЛА В ШНЕКОВОМ ПРЕССЕ ПРИ ПЕРЕРАБОТКЕ СЕМЯН КЛЕЩЕВИНЫ

Технологическая задача. Обоснование технологических режимов и основных параметров оборудования для переработки семян клещевины двукратным прессованием, обеспечивающих заданные качественные показатели касторового масла и жмыха, и снижение его потерь масла в жмыхе конечного прессования.

Научная гипотеза. Повышение качественных показателей касторового масла и снижение его потерь в жмыхе конечного прессования можно путём рациональной влаготепловой обработки, обеспечивающей снижения связи масла с гелевой частью и подготовки рационального сочетания пластичности и упругости структуры и последующих режимов консолидации мезги при прохождении через витки шнекового пресса в зерной камере.

Описание процессов, протекающих в шнековых прессах при отжиге растительных масел. Основным рабочим органом шнекового пресса является шнековый вал, собранный из отдельных витков, насаженный на общий вал и вмонтированный в зерную цилиндрическую камеру. Витки шнекового вала вместе с поверхностью зерного цилиндра образуют свободное пространство в виде винтового канала, геометрические особенности которого влияют на процесс переработки материала, в том числе на производительность, давление, отжим, качественные показатели масла и жмыха.

Поступающая мезга подхватывается вращающимся шнековым валом, и благодаря трению между зерном и мезгой, а также наличию нитки витка она стремится двигаться по спирали. Специальные ножи между половинками зерного барабана, а также «заёршенность» внутренней поверхности зеера обеспечивают движение мезги в основном вдоль оси шнекового вала.

Объём витков по мере выхода к выходу мезги уменьшается за счёт уменьшения шага витка и площади сечения между наружными диаметрами ступиц витка и зерным цилиндром. На первом витке материал содержит значительное количество пустых пор и существенного выделения масла не происходит. К концу первого витка в результате сближения внешних поверхностей частиц, связанного с уменьшением свободного объёма второго и последующих витков, происходит уплотнение материала и в нём остаются только полости, заполненные маслом. Под действием возрастающего давления в зоне второго и последующих витков происходит интенсивный отжим масла.

Масличность различных слоёв прессуемого материала по глубине канала неодинакова. Так, масличность хлопкового жмыха, полученного в прессе ФП во внутреннем слое, примыкающим к валу, оказалась на 1,83 – 4,1% выше, чем в наружном слое, примыкающем к зерному цилиндру [1]. Разница между масличностью прессуемого материала по слоям уменьшается к выходу. Увязывают это явление с различным напряжением в разных слоях материала в ходе отжима или с толщиной прессуемого материала, т.е. длиной пути фильтрации [2].

Отжим масла в самых общих чертах можно представить следующим образом. При сближении частиц мезги, на внешних и внутренних поверхностях которых масло удерживается силовым молекулярным полем, вначале начинается отжим масла по каналам между частицами, а с начала деформации самих частиц - по ка-

пиллярам, составляющим их внутреннюю полость. С этого момента отжим масла происходит одновременно как по каналам между частицами, так и по капиллярам внутри частиц, и масляная фаза с известным приближением может считаться непрерывной.

При прессовании в шнековом прессе [3] сначала после повышения определённого напряжения сдвига, называемого нижним пределом текучести τ_f , начинаются пластичные деформации, наблюдается появление некоторого градиента скорости, но настоящего пластичного течения ещё нет. Затем, по мере дальнейшего возрастания сдвига, эта промежуточная зона пластичного изменения структуры тела заканчивается при достижении некоторого напряжения сдвига – верхнего или максимального предела текучести τ_m , после чего начинается настоящее пластичное течение тела. Бингамовское предельное напряжение сдвига τ занимает какое-то промежуточное место между напряжениями сдвига, соответствующими нижнему и верхнему пределу текучести τ_f и τ_m .

Степень пластичности прессуемого материала должна находиться в известных пределах. С одной стороны, она не должна быть ниже некоторых пределов, чтобы не препятствовать достаточно полной пластической деформации частиц. С другой стороны, пластичность материала, в частности одна из её характеристик – текучесть, не должна быть чрезмерно большой по двум причинам: а) при чрезмерно большой текучести материал выползает из рабочего пространства пресса, в результате чего увеличивается количество «обратного товара», а в случае очень большой текучести – весь материал (вместе с маслом) выползает из рабочего пространства, так что отжим масла становится невозможным; б) при чрезмерно большой пластичности может происходить излишне быстрое соединение отдельных частиц в плотную массу; между тем соединение частиц прессования должно происходить таким образом, чтобы сохранилась пористость отжимаемой мезги, поскольку масло, выдавливаемое из промежутков между поверхностями, должно иметь пути для выхода из толщи мезги.

Можно продолжить рассуждения Голдовского, что верхний предел текучести, зависит и от маслячности мезги и её степени сжатия, тогда в шнековом прессе по мере продвижения мезги к выходу верхний предел текучести увеличивается. Поэтому подготовка мезги к прессованию (влажно-тепловая обработка) должна готовить структурно-механические свойства для условий прессования в первых шнечках. А по мере продвижения по шнековому валу с зеером маслячность мезги снижается, а степень её сжатия повышается, значит, верхний предел текучести мезги повышается.

Требования к подготовке мезги для прессования в шнековом пресса

Таким образом, при подготовке мезги для прессования необходимо обеспечить оптимальные параметры маслоотдачи мезги, структурно механических свойств её для прессования с учётом общей схемы отделения масла и вида масляной культуры.

Требование к структурно-механическому свойству мезги после влаготепловой обработки аналитически можно выразить следующей зависимостью

Бингамовский предел текучести τ_B

$$\tau_B = f_B \left(w_n, M_n, t_n, \theta_n, h, \frac{d\theta}{dt}, \theta_k, w_k \right), \quad (1.1)$$

Коэффициент маслоотдачи

$$k_M = f_M (w_n, M_n, t_n, \theta_n, h), \quad (1.2)$$

где

w_n, w_k – соответственно начальная и конечная влажность мятки;

M_n – начальная масличность мятки;

t_n – время самопропарки, мин;

θ_n, θ_k – соответственно температура при самопропарке мятки, температура мезги на выходе из жаровни;

h – высота слоя мезги в чане жаровни при самопропарке мятки;

$\frac{d\theta}{dt}$ – скорость сушки мезги в жаровне.

Силы, действующие в рабочей зоне шнекового пресса при отжиме

Условно можно считать, что мезга в цилиндре пресса располагается в виде полого цилиндра, основаниями которого служат передняя поверхность витка шнека и рабочая поверхность регулятора давления и толщины жмыха. Образующими поверхностями – внутренняя поверхность зернового цилиндра и вал шнека. Так как шнековый вал вращается, то каждое сечение этого цилиндра, перпендикулярное к оси, будет стремиться участвовать в двух движениях: поступательном – вдоль оси пресса, от витка к диафрагме, и вращательном – вокруг оси.

Давление p , которое возникает на отдельном витке при сжатии мезги до определённого объёма, представляется вектором, нормально направленным к поверхности передней грани нитки.

В существующих конструкциях витков нитка наклонена под некоторым углом α к торцу витка; в поперечном сечении нитка представляет собой трапецию с углом наклона передней грани нитки β (рис. 1)

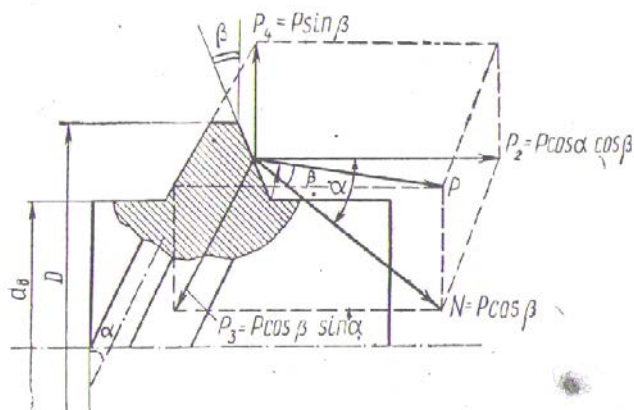


Рисунок 1 – Силы, действующие на витке шнека

Нормально направленный веток может быть разложен по трём координатным осям. В результате разложения этого вектора получаем три составляющих давления: p_2, p_3, p_4 .

$$p_2 = p \cos \alpha \cos \beta. \quad (1.3)$$

$$p_3 = p \cos \beta \sin \alpha. \quad (1.4)$$

$$p_4 = p \sin \beta. \quad (1.5)$$

p_2 – это давление витка на мезгу, направленное вдоль оси шнекового вала. Поэтому сила, противодействующая этому нажатию, т.е. сила упругих деформаций мезги, будет направлена в обратную сторону. Она является осевым усилием, которое воспринимает упорный подшипник шнекового вала.

Давление p_3 направлено против вращения шнекового вала и таким образом, препятствует его вращению. Она создаёт тот крутящий момент, который преодолевает шнековый вал.

p_4 – радиальное давление, направленное от вала к внутренней поверхности зернового барабана; оно прижимает мезгу к этой поверхности. Кроме того, под действием давления p_4 происходит выдавливание масла из толщи пресуемой мезги к щелям зернового барабана, через которые оно и удаляется. Однако нужно иметь в виду, что давление p_4 является лишь одной из составляющих полного радиального давления.

При сжатии тела в замкнутом пространстве силой, нормально направленной к поверхности сжимаемого тела, будет создаваться также радиальное давление

$$P = \xi P_n, \quad (1.6)$$

где P_n – нормальное давление, МПа;

ξ – коэффициент бокового давления:

$$\xi = \frac{\mu}{1 - \mu}, \quad (1.7)$$

где: μ – коэффициент Пуассона; для порошкообразных материалов $\mu = 0,28 \div 0,32$.

Для мезги примем среднее значение коэффициента Пуассона равным 0,3; тогда коэффициент бокового давления

$$\xi = \frac{0,3}{1 - 0,3} = 0,428.$$

Таким образом, создаваемое радиальное давление

$$p' = 0,428 P \cos \beta \cos \alpha. \quad (1.8)$$

Следовательно, полное удельное радиальное давление, МПа

$$p_p = p_4 + p' = p(0,428 \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta). \quad (1.9)$$

В тех направлениях, где имеется перемещение, возникают силы трения, направленные в сторону, обратную движению. В данном случае мезга перемещается вдоль линии действия давления p_3 ; поэтому развивающаяся сила трения

$$T = fN = fp \cos \beta, \quad (1.10)$$

где f – коэффициент трения мезги о поверхность витка.

Следовательно, суммарное удельное давление в направлении p_3 , МПа

$$p_T = p \cos \beta \sin \alpha + T = p(\cos \beta \sin \alpha + f \cos \beta). \quad (1.11)$$

Сила, давящая на нитку витка, Н

$$S = F_B p_T = [F_B p(\cos \beta \sin \alpha + f \cos \beta)] \cdot 10^6 \quad (1.12)$$

где F_B – боковая проекция площади нитки витка, м².

Боковая проекция площади нитки витка не представляет собой кольцо, так как шаг нитки больше длины витка, следовательно, на боковой проекции будет некоторый разрыв, равный углу θ . Поэтому боковая проекция площади нитки витка

$$F_B = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \frac{360 - \theta}{360}, \quad (1.13)$$

где D и d – наружные диаметры нитки и ступицы витка, м.

Сила S приложена на некотором расстоянии от оси шнекового вала, это расстояние равно среднему радиусу витка

$$r_{cp} = \frac{D + d}{4}.$$

Постановка задачи. Дана производительность шнекового пресса, обрабатываемая культура масличного сырья с её масличностью, место пресса в технологической цепочке переработке семян и масличность жмыха на выходе из пресса. Решение должно быть основано на теории трёхмерной консолидации обрабатываемого сырья с учётом реологических свойств «скелета» мезги. При этом считать, что ползучесть «скелета» мезги и фильтрационное движение масла происходят одновременно. Требуется найти рациональный закон консолидации в каждой шнечке и количество шнечков на валу пресса и требования к подготовке мезги при влаготепловой обработке мятки. При расчёте качественные показатели масла и жмыха обеспечиваются ограничением сочетания максимальных температуры и влажности обрабатываемого сырья.

Начальные условия записываются в виде

$$\bar{p} = \bar{p}^{(h)} \quad \text{при } t = 0.$$

Граничные условия

На непроницаемой границе очевидным является условие равенства нулю нормальной составляющей скорости потока жидкости. Из закона Дарси следует, что при этом

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \Big|_{\Sigma} = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial x_n}$ – производная по нормали к поверхности Σ .

На проницаемой границе условия обычно задаются либо в скоростях потока, либо в давлениях.

Граничное условие в скоростях

$$v_n = -k_\phi \left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \Big|_\Sigma.$$

Значение нормальной составляющей скорости должно быть известно для всех точек границы и для всего интервала времени.

Граничные условия в давлениях задаём в виде некоторой функции времени и координатах границы

$$H|_\Sigma = H(x_s; t) \text{ или } \bar{p}|_\Sigma = \bar{p}(x_s; t),$$

где x_s – координаты точек границы.

Основные уравнения теории консолидации и ползучести мезги семян масличных культур при работе шнековых прессов

Процесс отжима масла в шнековом прессе из мезги, как двухфазной или трёхфазной системы связан как с явлениями ползучести «скелета» мезги, так и с явлениями фильтрационного выдавливания масла. Основы теории совместного рассмотрения этих процессов заложены в теории консолидации и ползучести механики грунтов. Одновременный учёт этих двух основных процессов в мезге исключительно важен и приводит к выяснению значительных эффектов. Консолидацией называют процесс уплотнения полностью или частично насыщенного поровой жидкостью материала. При этом свойства скелета в отношении его деформируемости не ограничиваются какой-либо определённой расчётной моделью, а могут быть приняты любыми.

Поэтому предлагаемая теория прессования растительных масел из мезги масличных семян основывается на теории уплотнений или консолидации земляных масс в предположениях как полного насыщения пор грунта водой, так и наличия в них некоторого количества газа (воздуха, водяных паров). Процесс выжимания поровой жидкости при консолидации отличается от явлений, рассматриваемых в классических теориях фильтрации и миграции. Основное отличие заключается в непрерывном уменьшении пористости материала. Пористость уменьшается до тех пор, пока сжавшийся скелет не уравновесит своим сопротивлением дальнейшему уплотнению сжимающее давление.

Основной задачей процесса консолидации является вопрос о распределении для любого момента времени давлений в жидкости, заполняющей поры скелета прессуемого материала.

Применительно к задачам консолидации использована методика численных решений, основанных на применении способа конечных разностей. Принятый метод решения позволяет для плоской, осесимметричной и одномерной задач находить численные решения для любых граничных условий и любого вида рассматриваемой области. В случае же пространственной задачи количество необходимых вычислений значительно увеличивается.

Эта методика позволяет получить распределение давлений в поровой жидкости и напряжений в скелете материала для любого времени при любом виде поверхности или контура, ограничивающего рассматриваемую область среды. Получаемые для любой рассматриваемой задачи результаты могут быть представлены соответствующими рассматриваемому моменту времени линиями равных давлений или напоров заполняющей поры скелета мезги масла. Внешняя нагрузка

или граничные значения давлений в поровой жидкости могут изменяться во времени по любому закону.

При деформировании многофазной мезги семян масличных культур в шнековых прессах следует считать следующие основные особенности:

1. Под действием внешних и внутренних сил «скелет» мезги может изменять во времени объём и форму. Сопротивление изменению формы происходит за счёт работы вязких и хрупких связей в мезге. Количественное соотношение вязких и хрупких связей отражается на характере деформирования во времени (ползучести) «скелета» мезги.

2. Содержанием воздуха в порах пренебрегаем. Поровая жидкость (масло) не изменяет своей плотности, сопротивляясь только объёмному деформированию. Масло не воспринимает касательных напряжений, вязкость учитывается в неявном виде величиной коэффициента фильтрации, сопротивлением движению жидкости соответствующими объёмными силами.

3. В процессе консолидации всё время происходит изменение количественного соотношения фаз мезги в единице объёма. От длины пути, по которому перемещаются фазы мезги, зависит интенсивность процесса консолидации.

4. Деформирование во времени квазидвухфазной мезги включает два процесса, протекающих одновременно: процесс формоизменения во времени «скелета» мезги и процесс взаимного перемещения фаз грунта относительно друг друга.

5. В процессе консолидации мезга всё время изменяет своё состояние. Однако весь процесс можно условно разбить на три этапа. Мгновенное напряжённо-деформированное состояние, возникшее вслед за приложением внешних нагрузок; напряжённое состояние, соответствующее стабилизированному состоянию; напряжённое состояние, характеризующее весь промежуточный этап консолидации грунта.

Для математического описания процессов консолидации квазидвухфазной мезги в соответствии с требованиями обобщённой модели Флорина – Био, необходимо задать:

- А. Реологические уравнения состояния фаз.
 - В. Характер взаимодействия фаз.
 - С. Изменение соотношения фаз в единице объёма.
- Рассмотрим последовательно эти условия.

Уравнения состояния мезги (А)

Закономерностями деформирования мезги являются зависимости, характеризующие объёмное изменение и формоизменение собственного «скелета» мезги, а также зависимость изменения плотности внутривискозной жидкости (масла) от действия всестороннего давления [4].

Уравнение состояния «скелета» мезги. Экспериментальное определение уравнений состояния «скелета» основывается на исключении влияния внутривискозной жидкости на деформирование «мезги в целом». Последнее достигается удалением масла из пор скелета мезги и дальнейшим исследованием деформационных свойств, которые будут характеризоваться лишь сопротивляемостью межструктурных связей внешнему воздействию. Таким образом, за скелет мезги

условно можно принять жмых, получаемый из мезги конечным (экспеллерным) прессованием.

Параметры полученных закономерностей (модуль сдвига и модуль объёмного сжатия в случае линейных связей между напряжениями и деформациями) в общем случае зависят от времени, так как природа водно-коллоидных связей приводит к вязкому характеру смещений частиц отдельно друг от друга. Многочисленные исследования, направленные на феноменологическое описание реологических процессов грунтов, подробно освещены в трудах Н.Н. Маслова, С.С. Вялова, С.Р. Месчяна и др.. Предложены варианты описания этих свойств на основе теории наследственной ползучести, теории течения и теории упрочнения, найдены преимущества в применении той или иной теории. Пригодность теории наследственной ползучести, как известно, оценивается возможностью использования её для любых режимов и траекторий нагружения.

Для описания уравнения состояния необходимо иметь два инварианта закона деформирования. В качестве таких закономерностей в данной работе примем следующие:

1) Соотношение, связывающее интенсивность деформаций и напряжений сдвига [5]

$$\gamma^m = \frac{\tau}{A_0} \left[1 + \delta \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \right]; \quad (1.14)$$

или

$$\gamma = \left(\frac{\tau}{A_0} \right)^{1/m} \left[1 + \bar{\delta} \left(\frac{t}{T} \right)^\beta \right]. \quad (1.15)$$

– соотношение, связывающее объёмную деформацию $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ с суммой нормальных напряжений $\sigma_v = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$.

Изучение диаграмм прессования для клещевинной мезги показало, что зависимость между давлением, которое испытывает мезга, и степенью её сжатия, влажностью при определённой температуре описывается уравнением степенного вида

$$\sigma_v = \frac{2.52b\varepsilon_v^{5,0}}{e^{0.022w}}, \quad (1.16)$$

где σ_v – удельное давление, кг/см²;

ε_v – степень сжатия мезги;

w – влажность мезги, %;

e – основание натуральных логарифмов;

b – эмпирический коэффициент, зависящий от влажности мезги и температуры её жарения; значение этого коэффициента находится по таблице.

Из уравнения (1.16) найдём значение объёмной степени сжатия ε_v :

$$\varepsilon_v = A\sigma^{1/5}, \quad (1.17)$$

где $A = \left(\frac{e^{0,022w}}{2,52b} \right)^{1/5}$.

Закон объёмного сжатия в форпрессе ФП описывается зависимостью

$$\varepsilon_v = n_{ш}^k, \quad (1.18)$$

где $n_{ш}$ – номер шнечка на шнековом валу пресса;

k – показатель степени, обеспечивающий закон сжатия в зерновой камере пресса.

В прессе ФП количество шнечков $n = 9$, показатель степени $k = 1,145$.

В уравнениях (1.14), (1.15) A_0 – модуль мгновенного ($t = 0$) деформирования, Па; δ , $0 < m \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ ($\alpha \neq \beta$) – безразмерные величины; T – произвольная величина, выраженная в единицах времени, которую можно принять равной единице. Уравнения вида (1.14) и (1.15) описывают процесс ползучести, при котором скорость деформации $\dot{\gamma}$ уменьшается, стремясь к нулю ($t \rightarrow 0$), тогда как сама деформация неограниченно возрастает: $\gamma \rightarrow \infty$ (при $t \rightarrow \infty$).

В уравнении (1.16) $e_v = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, $\sigma_v = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$.

Уравнения состояния поровой жидкости. Предполагаем, что поры мезги заполнены растительным маслом, в нашем случае касторовым маслом. В дальнейшем для простоты расчёта поровую жидкость будем считать несжимаемой и полностью заполняющей поры, кроме рабочего объема первого шнечка. Принимаем, что поровая жидкость не сопротивляется сдвиговым деформациям. Таким образом в ней возникает лишь гидростатическое давление p .

Характер взаимодействия фаз (В)

Для упрощения расчёта принимаем, что давление в поровой жидкости не вызывает в «скелете» мезги дополнительную деформацию.

Изменение соотношения фаз в единице объёма (С)

В мезге, полностью насыщенной маслом, соотношение фаз в единице объёма, очевидно, контролируется её пористостью $n = V_{п} / V$ или коэффициентом пористости $\varepsilon = V_{п} / V_{т}$.

Для этого случая мезги закономерность изменения пористости выводится аналитически на основе закона фильтрации жидкости в порах мезги и условия неразрывности твёрдой и жидкой фаз. Скорость изменения жидкой фазы в единице объёма при фильтрации масла через слой мезги в цилиндрической системе координат (см. Отчёт раздел 05.1-2/02.02.03)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = & -\frac{1}{(1 + \varepsilon_{cp})} \left(v_r^{ck} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} (\sin \varphi + \cos \varphi) + v_z^{ck} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{(1 + \varepsilon_{cp})} \frac{1}{\rho \eta} k_r \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{(1 + \varepsilon_{cp})} \frac{1}{\rho \eta} k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Составление основного уравнения консолидации

При работе шнекового вала прессы принимаем с достаточной степенью точности процесс установившемся, т.е. в каждой точке рабочей зоны шнекового вала скорость массы, давление, степень сжатия принимаем постоянными, не зависящими от времени.

Уравнение неразрывности жидкой фазы в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (1.20)$$

Уравнение неразрывности твёрдой фазы в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.21)$$

Зависимость Дарси – Герсеванова

$$\left. \begin{aligned} u_x - \varepsilon v_x &= -k \left(\frac{\partial H}{\partial x} - i_0 \right); \\ u_y - \varepsilon v_y &= -k \left(\frac{\partial H}{\partial y} - i_0 \right); \\ u_z - \varepsilon v_z &= -k \left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_0 \right); \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Дифференцируя зависимости Дарси-Герсеванова для направлений x, y, z

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \varepsilon_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} - \varepsilon_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} - \varepsilon_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \left(\varepsilon_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \varepsilon_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \varepsilon_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \\ &- \left(v_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Учитывая уравнение неразрывности жидкой фазы (1.4)

$$\begin{aligned} &\left(\varepsilon_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \varepsilon_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \varepsilon_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left(v_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Учитывая, что $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, а $\sigma_v = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ из зависимости (1.2), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} &= \frac{1}{5} A \sigma_x^{-4/5} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} &= \frac{1}{5} A \sigma_y^{-4/5} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} &= \frac{1}{5} A \sigma_z^{-4/5} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Тогда уравнение (1.9) консолидации можно представить в прямоугольной системе координат в таком виде

$$\begin{aligned} & A \left(\sigma_x^{1/5} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_y^{1/5} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_z^{1/5} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{5} A \left(v_x \sigma_x^{-4/5} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + v_y \sigma_y^{-4/5} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + v_z \sigma_z^{-4/5} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Рассмотрение процесса консолидации мезги в шнековом прессе сводится к пространственной задаче с осевой симметрией в цилиндрических координатах. При постоянных величинах коэффициента фильтрации, равных в радиальном направлении k_ρ и в осевом направлении k_z и несжимаемости поровой жидкости T

$$\begin{aligned} [] &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ &= k_\rho \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + k_z \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в соответствии с рис.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Имеем

$$[] = k_r \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (1.28)$$

ρ – удельный вес поровой жидкости, в нашем случае касторового масла;

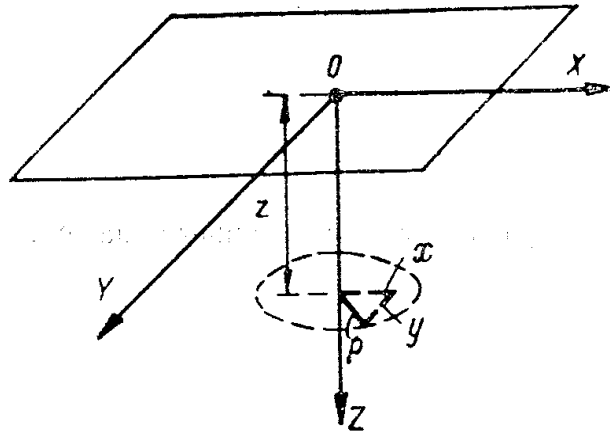


Рисунок 2 – Схема пространственной задачи с осевой симметрией

При рассмотрении пространственной задачи и наличии осевой симметрии будем для упрощения полагать, что коэффициенты фильтрации, равные в вертикальном положении k_r и в горизонтальном направлении k_z постоянные. Тогда основное уравнение консолидации в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 & A \left[\sigma_r^{1/5} \frac{\partial v_r}{\partial r} (\sin \varphi + \cos \varphi) + \sigma_z^{1/5} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 & + \frac{1}{5} A \left[v_r \sigma_r^{-4/5} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (\sin \varphi + \cos \varphi) + v_z \sigma_z^{-4/5} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right] = \\
 & = \frac{1}{\rho} k_r \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Часть напряжения, определяемая фильтрационными силами, обусловленными собственным весом воды и граничными значениями напоров. Этой частью напряжений мы пренебрегаем.

Остаётся часть напряжений, определяемая внешними нагрузками. Собственным весом скелета также пренебрегаем.

Таким образом, мы получили эллиптический тип уравнения в частных производных Пуассона, который можно коротко написать

$$k_r \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = g(z, r), \tag{1.30}$$

где

$$\begin{aligned}
 g(z, r) = & A \rho \left[\sigma_r^{1/5} \frac{\partial v_r}{\partial r} (\sin \varphi + \cos \varphi) + \sigma_z^{1/5} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 & + \frac{1}{5} A \rho \left[v_r \sigma_r^{-4/5} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (\sin \varphi + \cos \varphi) + v_z \sigma_z^{-4/5} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right].
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Решение уравнения (1.30) сводится к задаче Дирихле – Неймана. В этой задаче краевые условия на части поверхности задаются искомой функцией p – дав-

ления (задача Дирихле), а на части поверхности задаются значения нормальной производной $\frac{\partial p}{\partial n}$ – поток через поверхность (задача Неймана).

Описание способа конечных разностей численных решений задач уплотнения

Основные уравнения. Определение значений напорных функций для любого момента времени путём непосредственного интегрирования уравнений уплотнения при соблюдении необходимых начальных и граничных условий вызывает во многих случаях, даже при простейшем виде рассматриваемых областей, значительные затруднения. При рассмотрении систем дифференциальных уравнений с весьма общими краевыми условиями точные методы математической физики наталкиваются на большие трудности, которые становятся непреодолимыми при рассмотрении нелинейных задач. В этих случаях приходится обращаться к тем или иным численным методам решения. Важно отметить, что использование численных методов зачастую позволяет отказаться от упрощённой трактовки математической модели процесса. Целесообразно в данном случае использовать способ конечных разностей, или как его ещё называют, метод сеток, который может быть применён для решения любой практической задачи.

Метод конечных разностей основан на замене производных их приближённым значением, выраженным через разности значений функции в отдельных дискретных точках – узлах сетки. Дифференциальное уравнение в результате таких преобразований заменяется эквивалентным соотношением в конечных разностях, решение которого сводится к выполнению несложных алгебраических операций.

Вместо того чтобы искать решения, позволяющие определить значения искомой функции для любой точки и любого момента времени, можно определять значения искомой функции только в узловых точках плоской (рис.) или пространственной сеток, лежащих внутри рассматриваемой области.

Перейдём к конечным разностям и полагая прямые $r = r_i$ и $z = z_k$, образующие сетку, равностоящими, получаем

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta r}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta z}, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r} = \frac{\sigma_{i,j+1}^* - \sigma_{i,j}^*}{\Delta r}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} = \frac{\sigma_{i+1,j}^* - \sigma_{i,j}^*}{\Delta z}, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta r}, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \approx \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta r^2}, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta z^2}. \quad (1.38)$$

Дифференциальное уравнение (1.30) заменим приближённым уравнением в конечных разностях

$$k_r \left(\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta r} \right) + k_z \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta z^2} = g(z, r), \quad (1.39)$$

где

$$g(r, z) = A\rho\sigma_r^{1/5} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta r} (\sin\varphi + \cos\varphi) + A\rho\sigma_z^{1/5} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta z} + \frac{1}{5} A\rho v_r \sigma_r^{-4/5} \frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j}}{\Delta r} (\sin\varphi + \cos\varphi) + \frac{1}{5} A\rho v_z \sigma_z^{-4/5} \frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i,j}}{\Delta z}. \quad (1.40)$$

Так как исследуемый объект имеет форму цилиндра и обладает осевой симметрией изобразим верхнюю часть цилиндра в виде прямоугольника $K = \{(z, r) : 0 \leq z \leq l, c \leq r \leq a\}$, разделённого на $(n-1) \times (m-1)$ прямоугольников со сторонами, равными h и l (т.е. $a - c = nh$ и $b = ml$), как показано на рис.3

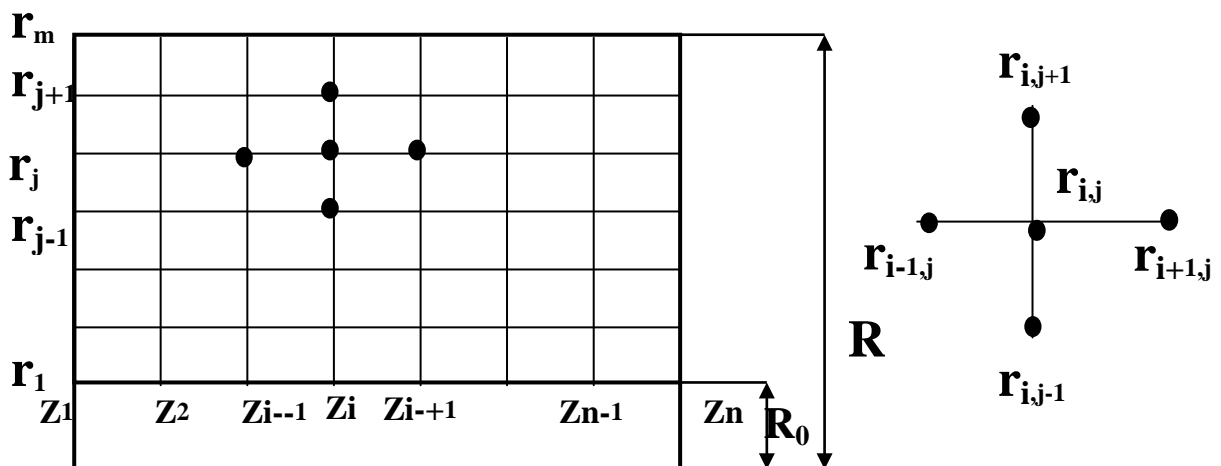


Рисунок 3 – Решетка, которую используют с разностным уравнением эллиптического типа

Значения $p(z, r)$ известны в следующих граничных точках решётки:

$$\begin{aligned}
p(z_1, r_i) &= p_{1,j} \quad \text{для } 2 \leq j \leq m-1 \quad (\text{слева}) \\
p(z_i, r_1) &= p_{i,1} \quad \text{для } 2 \leq i \leq n-1 \quad (\text{внизу}) \\
p(z_n, r_j) &= p_{n,j} \quad \text{для } 2 \leq j \leq m-1 \quad (\text{справа}) \\
p(z_i, r_m) &= p_{i,m} \quad \text{для } 2 \leq i \leq n-1 \quad (\text{вверху})
\end{aligned}$$

Преобразуем уравнение (1.39)

$$\begin{aligned}
p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j} + \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} p_{i,j+1} - 2\frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} p_{i,j} + \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} p_{i,j-1} + \\
+ \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r} \frac{1}{r} p_{i,j+1} - \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r} \frac{1}{r} p_{i,j} - \frac{\Delta z^2}{k_z} q(z, r) = 0.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
p_{i+1,j} - \left(2 + 2\frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} + \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r} \frac{1}{r} \right) p_{i,j} + p_{i-1,j} + \left(\frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} + \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r} \frac{1}{r} \right) p_{i,j+1} + \\
+ \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} p_{i,j-1} - \frac{\Delta z^2}{k_z} q(z, r) = 0.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\left. \begin{aligned}
& p_{i+1,j} - a_1 p_{i,j} + p_{i-1,j} + a_2 p_{i,j+1} + a_3 p_{i,j-1} - a_4 q(z, r) = 0; \\
& a_1 = 2 + 2\frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} + \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r} \frac{1}{r}; \\
& a_2 = \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2} + \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r} \frac{1}{r}; \\
& a_3 = \frac{k_r \Delta z^2}{k_z \Delta r^2}; \\
& a_4 = \frac{\Delta z^2}{k_z}.
\end{aligned} \right\} \tag{1.43}$$

В нашем случае нижняя, левая и правая границы непроницаемы, это является условием равенства нулю нормальной составляющей скорости потока жидкости (граничные условия Неймана). Из закона Дарси следует, что при этом

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \tag{1.44}$$

Правая граница $z_{n,j}$ нашего прямоугольника $K = \{(z, r): 0 \leq z \leq l, c \leq r \leq a\}$.

Нормальные граничные условия для этой грани

$$\frac{\partial}{\partial z} p(z_n, r_j) = p_z(z_n, r_j) = 0. \tag{1.45}$$

Тогда разностное уравнение Пуассона для точки (z_n, r_j) имеет вид

$$p_{n+1,j} - a_1 p_{n,j} + p_{n-1,j} + a_2 p_{n,j+1} + a_3 p_{n,j-1} - a_4 q(z, r) = 0; \quad (1.46)$$

Значение $p_{n+1,j}$ неизвестно, так как оно находится в не области K . Тем не менее можно использовать формулу численного дифференцирования

$$\frac{p_{n+1,j} - p_{n-1,j}}{2h} \approx p(z_n, r_i) = 0 \quad (1.47)$$

И получим приближение $p_{n+1,j} \approx p_{n-1,j}$, имеющее порядок точности $O(h^2)$. Если использовать это приближение в уравнение (1.46), то в результате можно получить

$$2p_{n-1,j} - a_1 p_{n,j} + a_2 p_{n,j+1} + a_3 p_{n,j-1} - a_4 q(z, r) = 0; \quad (1.48)$$

Эта формула выражает соотношение между значением функции $p_{n,j}$ и её смежными значениями $p_{n-1,j}$, $p_{n,j+1}$, $p_{n,j-1}$.

Схемы вычислений для других граней можно вывести аналогично

$$2p_{n-1,j} - a_1 p_{n,j} + a_2 p_{n,j+1} + a_3 p_{n,j-1} - a_4 q(z, r) = 0; \quad (\text{правая грань}) \quad (1.49)$$

Краевые условия

Совокупность начальных и граничных условий называется краевыми условиями; начальное условие называется временным краевым условием, а граничное условие – пространственным краевым условием.

Если предположить, что пористая мезга линейно зависит от порового давления, то основное уравнение становится дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа относительно этого давления. Для того, чтобы решить конкретную задачу об определении порового давления, возникающего в масле при консолидации мятки, необходимо задать граничные и начальное условия. Эти условия налагаются на поровое давление \bar{p} (1.8) и функцию порового давления H .

Начальные условия записываются в виде

$$\bar{p} = \bar{p}^{(n)} \quad \text{и} \quad H = H^{(n)} \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1.50)$$

Граничные условия могут быть двух типов.

На непроницаемой границе очевидным является условие равенства нулю нормальной составляющей скорости потока жидкости. Из закона Дарси следует, что при этом

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (1.51)$$

Где $\frac{\partial}{\partial x_n}$ – производная по нормали к поверхности Σ .

На проницаемой границе условия обычно задаются либо в скоростях потока, либо в давлениях.

Граничное условие в скоростях задаётся в виде

$$v_n = -k_\phi \left(\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \Big|_\Sigma. \quad (1.52)$$

Значение нормальной составляющей скорости должно быть известно для всех точек границы и для всего интервала времени.

Граничные условия в давлениях задаются обычно в виде некоторой функции времени и координатах границы

$$H|_\Sigma = H(x_s; t) \text{ или } \bar{p}|_\Sigma = \bar{p}(x_s; t), \quad (1.53)$$

где x_s – координаты точек границы.

В случае, если жидкость свободно удаляется с некоторой части границы Σ_1 , поровое давление на ней, очевидно, равно нулю

$$\bar{p}|_{\Sigma_1} = 0. \quad (1.54)$$

Начальное и граничные условия определяют единое решение указанных дифференциальных уравнений.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- 1 Технология производства растительных масел /В.М. Копейковский, С.И. Данильчук, Г.И. Гарбузова и др.; под ред. В.М. Копейковского. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1982. – 416 с.
- 2 Белобородов В.В. Основные процессы производства растительных масел / В.В. Белобородов. – М.: Пищевая промышленность, 1966. – 478 с.
- 3 Голдовский А.М. Теоретические основы производства растительных масел. – М.: Пищепромиздат, 1958. – 446 с.
- 4 Флорин В.А. Теория уплотнения земляных масс. – М.: Стройиздат, 1948. – 284 с.

-
- 5 Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов: Учеб. Пособие для строительных вузов. – М.: Высш. школа, 1978. – 447 с.